Surfaces hyperboliques aléatoires

Cours n° 6

Nalini Anantharaman

18/12/2024

n fixé, $g \to \infty$

$$V_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n) = \sum_{|d| \leq 3g-3+n} c_{g,n}(d) \prod_i \frac{1}{(2d_i+1)!} \left(\frac{\ell_i^2}{2}\right)^{d_i}$$

$$c_{g,n}(d) \leq c_{g,n}(0) = V_{g,n}$$

$$\ell_1 \dots \ell_n \, V_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n) \leq V_{g,n} \prod \operatorname{sh}\left(\frac{\ell_i}{2}\right)$$

$$\leq V_{g,n} \, e^{\sum \ell_i/2}$$

d fixé $\quad \dfrac{c_{g,n}(d)}{V_{g,n}} = 1 + d.a.\left(\dfrac{1}{g}\right)$

$$4\pi^2(2g-2+n)\frac{V_{g,n}}{V_{g,n+1}} = 1 + d.a. \qquad \frac{V_{g,n}}{V_{g-1,n+2}} = 1 + d.a.$$

$n_1, \dots, n_q$ donnés

$$\sum_{\substack{g_1 \dots g_q \\ \sum_i 2g_i - 2 + n_i = r \\ 2g_i - 2 + n_i \geq 1}} V_{g_1,n_1} \cdots V_{g_q,n_q} \leq C \left(\frac{C}{r}\right)^{q-1} W_r$$

$W_r = V_{\frac{r}{2}+1,0}$, r pair

$ = V_{\frac{r+1}{2},1}$, r impair

Mirz-Zograf $\quad V_{g,n} = C \dfrac{(2g-3+n)!\,(4\pi^2)^{2g-3+n}}{\sqrt{g}} \left(1 + \underset{\text{unif. si } n = o(\sqrt{g})}{\underline{\dfrac{\cdot}{}}}\right)$

$= \chi^{\chi} \times O(e^{c\chi}) \qquad \chi = 2g-2+n.$

<u>A-Monk</u> : dépendance en d des $c_{gn}(d)$

$m \in \mathbb{N}^n$, $|m| = 2N-1$; $\quad |\underbrace{\delta^m}_{\text{dérivée discrète}} \underbrace{c_{gn}}_{\text{fct de }(d_1,\dots,d_n)}(d)| \leq C_{n,N} \|d\|^N \dfrac{V_{g,n}}{g^N}$, $\quad d_i \in \mathbb{N}$, $m_i \neq 0 \Rightarrow d_i \geq \underset{2^N}{\overset{\shortparallel}{a_N}}$

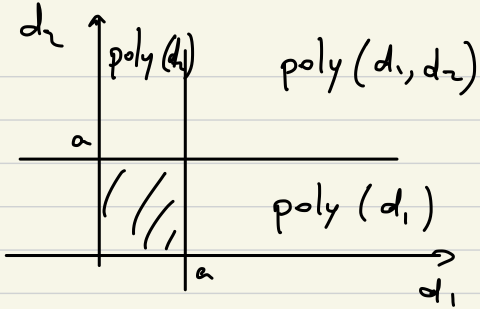
$$\delta_i f(d_1,\dots,d_n) = f(d_1,\dots d_i+1,\dots d_n) - f(d_1 \dots d_i \dots d_n)$$

Conséquence : $c_{gn}(d)$ dépend presque polynomialement de d.
(dév.t Taylor)

$$c_{g,n}(d) = \underbrace{\tilde{c}^{(2N)}_{g,n}(d)}_{\in \mathcal{P}_{n,2N,a_N}} + O\left(\|d\|^{3N+1} \frac{V_{g,n}}{g^{N+1}}\right)$$

fct polyn. à partir d'1 certain rang

$\mathcal{P}_{\underset{\#\text{var}}{n},\underset{d^\circ}{K},\underset{\text{rang}}{a}}$ = e.v. engendré par $\left\{ \prod_i d_i^{k_i} \mathbb{1}_{|d_i| \geq a} \prod_i \mathbb{1}_{\{d_i = \beta_i\}} \right.$ $\quad \sum k_i \leq K \quad |\beta_i| < a \Big\}$



$a_N = 2^N$ pas optimale.

≥ 0 ← Les coefs de $\hat{c}_{g,n}(d)$ sont des combinaisons linéaires des condit° initiales $c_{g,n}(\beta)$ pour $|\beta|_\infty \leq a_N + 2N$.

$\Rightarrow$ info sur $V_{g,n}(\vec{\ell})$.

$$\frac{\prod_i \ell_i \, V_{g,n}(\vec{\ell})}{V_{g,n}} = F^{(N)}_{g,n}(\vec{\ell}) + O_{N,n}\left(\frac{\|\ell\|^{3N+1} e^{\sum \ell_i/2}}{g^{N+1}} \right), \text{ avec}$$

$$F^{(N)}_{g,n}(\vec{\ell}) = \underset{(*)}{\text{comb. lin.}} \underbrace{\prod_{i\in I_0} \ell_i^{k_i} \prod_{i \in I_+} \ell_i^{k_i} \cosh\left(\frac{\ell_i}{2}\right)}_{k_i \text{ impairs}} \underbrace{\prod_{i\in I_-} \ell_i^{k_i} \operatorname{sh}\left(\frac{\ell_i}{2}\right)}_{k_i \text{ pairs}}$$

condit° de parité

$\sum_{i \in I_+ \cup I_-} k_i \leq 2N$ (semble optimal), $\quad i \in I_0 \Rightarrow k_i \leq a_{N+1} \sim 2^{N+1}$.

Les coeffs $^{(*)}$ sont des comb lin. des $\dfrac{c_{gn}(\beta)}{V_{gn}}$. $|\beta|_\infty \leq a_N + 2N$.

MZ : dépendance p/r g

AM : — p/r $\vec{\ell}$.

<u>Corollaire</u>

$$\frac{\prod \ell_i \, V_{gn}(\vec{\ell})}{V_{gn}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{F_{n,k}(\ell_1 \dots \ell_n)}{g^k} + O\left(\frac{\|\ell\| e^{3N} \, e^{\sum \ell_i/2}}{g^{N+1}}\right)$$

$F_{n,k}(\vec{\ell})$ est comb. lin. de $(*)$, $\sum k_i \leq 2k$.

<u>Rque</u> : <u>unif. en $\vec{\ell}$</u> t.q. $\|\ell\| \leq g^{1/3}$ ← probabl^t 1/2.

tous les termes sont $e^{\sum \ell_i/2}$

(On aura besoin de longueurs $\ell = O(\log g)$ pour le trou spectral.)

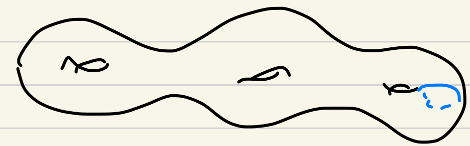
M.P : $k=0$, $F_{n,0}(\vec{\ell}) = 2^n \prod_i \sinh\left(\frac{\ell_i}{2}\right)$

2) Géométrie asymptotique

• $\mathbb{E}_g^{WP}\Big($ # géod fermées simples non séparantes , de longueurs $\in [a,b]\Big)$

$$= \frac{1}{V_g} \int V_{g-1,2}(\ell,\ell)\, \mathbb{1}_{[a,b]}(\ell)\, \ell \, d\ell$$

$$\frac{\ell^2 V_{g-1,2}(\ell,\ell)}{V_{g-1,2}} \cdot \underbrace{\frac{V_{g-1,2}}{V_g}}_{\longrightarrow 1} \xrightarrow[g\to\infty]{} 4\, \mathrm{sh}^2\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

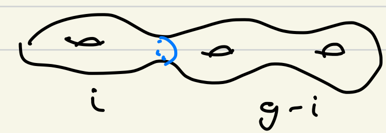


$$\Rightarrow \lim_{g\to\infty} \mathbb{E}_g^{[\cdot]} = 4 \int_a^b \mathrm{sh}^2\left(\frac{\ell}{2}\right) \frac{1}{\ell}\, d\ell \,.$$

• $\mathbb{E}_g^{WP}\Big[$ géod simples séparantes orientées de longueurs dans $[a,b]\Big]$

$$= \frac{1}{V_g} \sum_{i=1}^{g-1} \int_a^b V_{g-i,1}(\ell)\, V_{i,1}(\ell)\, \ell\, d\ell$$

↪ chaque terme = orbite par MCG
$i \neq g-i$ cf. orientation de l'orbite



$$\leq \underbrace{\frac{1}{V_g}\sum_{i=1}^{g-1} V_{g-i,1}\, V_{i,1}}_{} \int_a^b \frac{sh^2\, \ell/2}{\ell}\, d\ell$$

$$= \qquad O\left(\frac{1}{g}\right) \int_a^b \frac{sh^2\, \ell/2}{\ell}\, d\ell \longrightarrow 0 \text{ si } a, b \text{ fixés}$$

Si $a=0$
$b \uparrow$

$$\text{En fait } \frac{1}{V_g}\sum_{i=1}^{g/2} V_{g-i,i}(\ell)\, V_{i,1}(\ell) = \frac{1}{V_g} \underbrace{\overbrace{V_{g-1,1}(\ell)}^{\leq V_{g-1,1}\, e^{\ell/2}}\, \overbrace{V_{1,1}(\ell)}^{\text{poly}(\ell)}}_{\text{domine}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{g/2} \cdots \quad \cdots}_{\leq \sum_2^{g/2} V_{g-i,1} V_{i,1} e^{\ell} / V_g \;=\; O\left(\frac{1}{g^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\#\text{ simples sép.},\ \ell \leq b\right] \leq \frac{V_{g-1,1} V_{1,1}}{V_g} b^2 e^{b/2} + O\left(\frac{e^b}{g^2}\right)$$

$$\frac{V_{g-1,1}}{V_g} = O\left(\frac{1}{g}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\quad] \leq \frac{b^2 e^{b/2}}{g} + O\left(\frac{e^b}{g^2}\right)$$

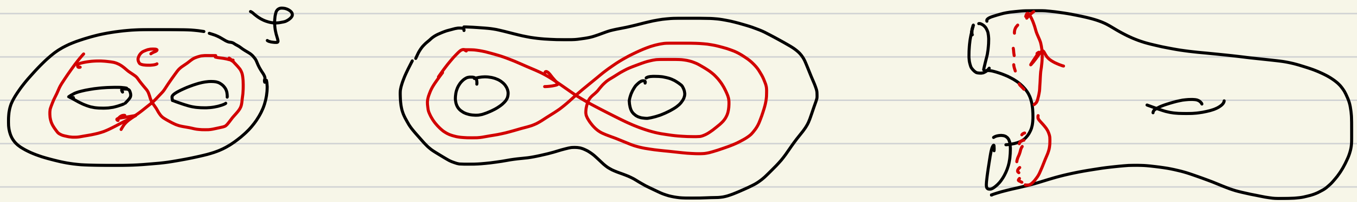
$$\longrightarrow 0 \text{ unif}^t \text{ si } \underline{b = c \log g\,, \quad c < 2.}$$

3) Géodésiques non simples

Def $\mathcal{S}$ surface orientée à bord, C courbe fermée orientée dans $\mathcal{S}$.

C <u>remplit</u> $\mathcal{S}$ si $\mathcal{S} \setminus C$ est topol. une union de disques et de cylindres périphériques (partageant un bord avec $\mathcal{S}$).

Ex:

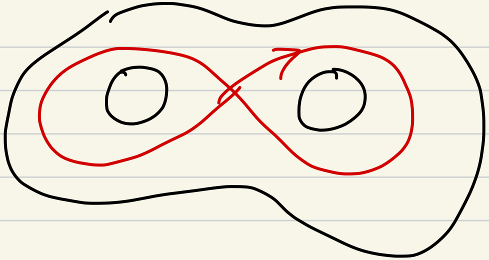


OK OK NON

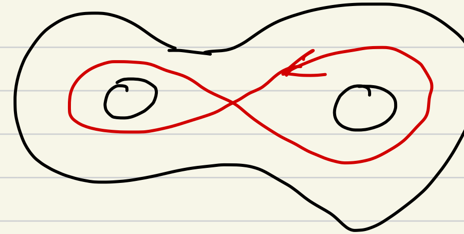
Def $(\mathcal{S}, c)$, $(\mathcal{S}', c')$ c, c' remplissantes orientées, "en posit° minimale"

Sont $\equiv$ si $\exists\, \varphi$ homéo $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ préserve orienta°, et $\varphi(c)$ homotope à c', avec orienta° préservée.

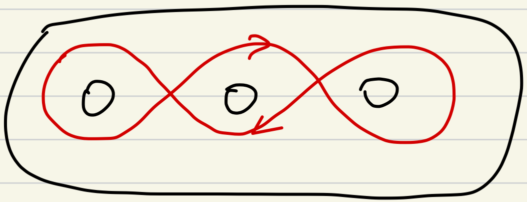
(on ne numérote pas les comp de bord)



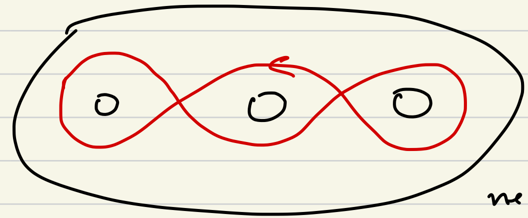
$\equiv$



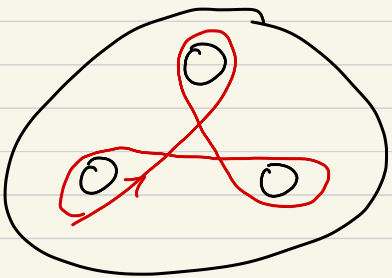
par rotation de π



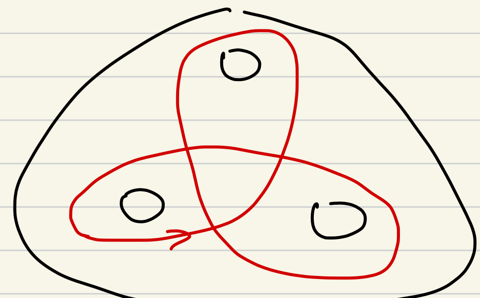
$\not\equiv$



(le flip ne préserve pas l'orientation)

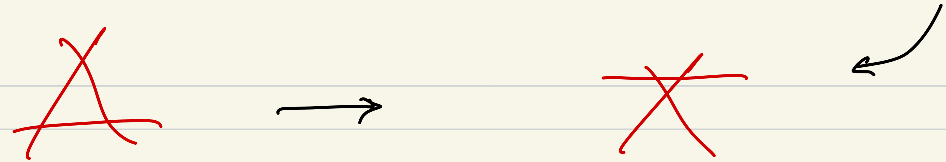


$\equiv$



Thm Graaf-Schreiber

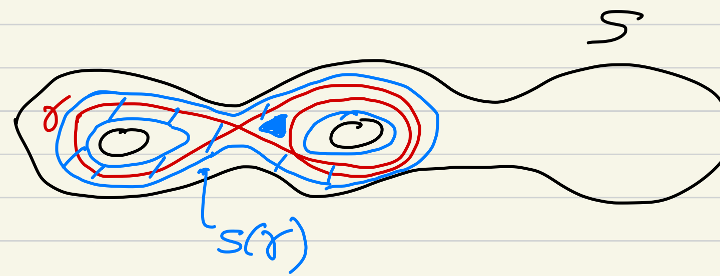
Si c, c' en position minimale sur Σ. c homot. à c' $\iff$ $\exists$ isotopie globale de Σ qui envoie c sur $\tilde{c}$, $\tilde{c}$ diffère de c' par <u>mouvements de Reidemeister de type 3</u> :



Déf. Types topologiques locaux = classes d'$\sim$

S surface, γ courbe fermée sur S.

$S(\gamma)$ = "surface remplie par γ".

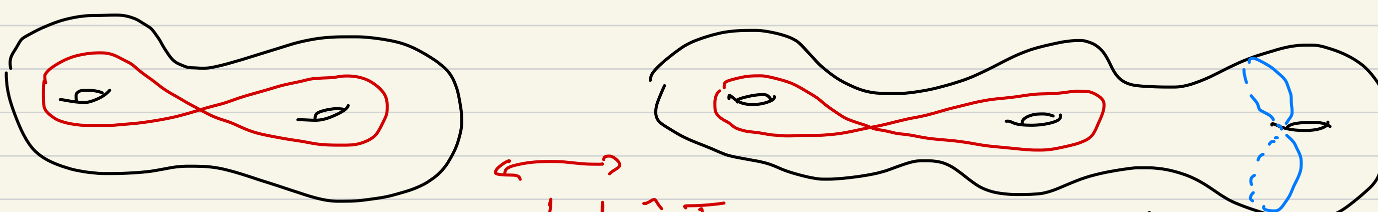


$B(\gamma,\epsilon)$ ϵ-voisinage de γ

$\cup$ comp. conn. de $S \setminus B(\gamma,\epsilon)$ qui st des disques.

γ a le type topol. <u>local</u> T si $(S(\gamma),\gamma) \in T$.

Ex:



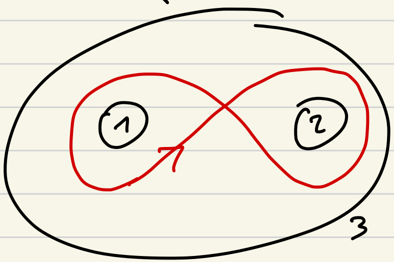
∞ sont ds m̂ T

∞ ds m̂ type que ∞

. But : $\mathbb{E}_g$ (# géod orientée de type T, de longueur $\in [a,b]$)

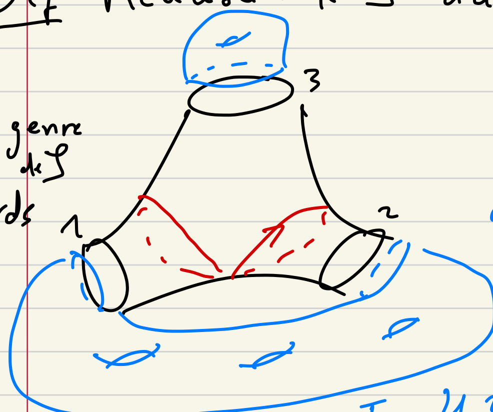
T type topol. local

On fixe un reprst $(\mathcal{S}^T, c^T) = (\mathcal{S}, c)$ du type T.



contient des ∞ qui ne sont pas dans la même orbite par le MCG.

<u>Déf</u> Réalisation de $\mathcal{S}$ dans 1 surface S_g de genre g :



$g_{\mathcal{S}}$ = genre de $\mathcal{S}$

$n_{\mathcal{S}}$ = # bords

$q = 2$

$I_1 = \{1, 2\}$ $g_1 = 3$

$I_2 = \{3\}$ $g_2 = 1$

. donnée d'un entier $q \geq 1$ = # comp. connexes du compt.

. une partition $(I_1, .., I_q)$ de $(1, .., n_{\mathcal{S}})$

. $\vec{g} = (g_1, .., g_q)$ genre des morceaux

$2g_i - 2 + n_i \geq 0$ (on ne peut pas recoller des disques)

$n_i = \# I_i$ cylindres OK.

On veut S_g de genre g. $\quad |\chi|(g_i,n_i) = 2g_i - 2 + n_i$

$$\Rightarrow \sum_i |\chi|(g_i,n_i) + |\chi|(g_\varphi, n_\varphi) = 2g-2.$$

$\Rightarrow$ sert à énumérer les orbites du $MCG^+(S_g)$ sur les surfaces $\Sigma \subset S_g$ homéom. à $\mathcal{S}$, à bords numérotés.

Thme

$$E_g\left(\#\text{ géod fermée orientée de type } T \text{ de longueur } \in [a,b]\right)$$

$$= \frac{1}{m(T)} \sum_{R=(\vec{I},\vec{g})} \int_{\vec{\ell}=(\ell_1,\dots,\ell_{n_\varphi})} \prod_{i=1}^{q} V_{g_i,n_i}\left(\vec{\ell}_{|I_i}\right) \prod \ell_i \, d\ell_i \left(\sum_{\gamma \in \mathrm{Orb}(C)} \mathbb{1}_{[a,b]}(\ell(\gamma))\right) d\mu_{\mathcal{S},\vec{\ell}}(y)$$

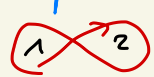
parties extérieures

partie interne ($\mathcal{S}$)

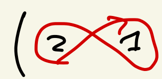
facteur combinatoire

$y \in \mathcal{M}_{\vec{\ell}}(\mathcal{S})$

$m(T) = \#\{$permutat° de $\partial\mathcal{S}$ induites par difféos de $\mathcal{S}$ qui préservent $C\}$

ex : $m(T) = 2$: 2 dessins du 

$\equiv$ 

$= \mathrm{rot}_\pi\Big($ 

$\Big)$

Rque: la partie sur $\mathcal{M}_{\vec{\ell}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{M(T)} \displaystyle\int_{y \in \mathcal{T}_{\vec{\ell}}(\mathcal{S})} \mathbb{1}_{[a,b]}(\ell(c))\, d\mu(y)$
par relèvement $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T}$.

$M(T) = \#$ elts de $MCG^+(\mathcal{S})$ qui envoient c sur une courbe qui lui est homotope

[On a besoin du fait que c remplit $\mathcal{S}$ pour que
$$\int \mathbb{1}_{[ab]}(\ell_y(c))\, d\mu(y) \text{ soit } \underline{\text{finie}}.$$

Intégrale de type $I = \displaystyle\int \mathbb{1}_{[ab]}(\ell)\, \underbrace{V_g^T(\ell)}_{\text{fc° continue (densité)}}\, d\ell$: la mesure image par 1 $\underline{\text{fc° anal.}}$ a 1 densité.

$\underline{\text{Def}}$ V_g^T = fonc° volume assoc. au type topol. local T.

fonc° analytique : $(\vec{\ell}, y) \longmapsto \ell_y(c)$
$y \in \mathcal{T}_{\vec{\ell}}(\mathcal{S})$

claim: $I = O\left(\frac{e^{cb}}{g^{|\chi|(\mathcal{S})}} \right)$

b fixé

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\# \text{ geod. type } T, \text{ longueur } \leq b \right) \longrightarrow 0$ si T non simple

$= O\left(\frac{1}{g^{2g_{\mathcal{S}} - 2 + n_{\mathcal{S}}}} \right).$